ION BUCUR POPESCU

GHID DE PREGĂTIRE BACALAUREAT

MATEMATICĂ

M_şt-nat

EDITURA CARMINIS
PITEŞTI

CUPRINS

TEME RECAPITULATIVE

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Noțiuni teoretice

Modulul numărului $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

Proprietățile modulului: $|x| \geq 0$ pentru $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x| = \max(x, -x)$;

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pentru $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ pentru $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ şi $y \neq 0$; $|x + y| \leq |x| + |y|$;

$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$; $|x| \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$, unde $r > 0$; $|x| > r \Leftrightarrow x \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)$.

Pentru $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\exists!\ n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n \leq x < n + 1$, $n \overset{not}{=} [x]$ – partea întreagă a lui x, $x - [x] = \{x\}$ – partea fracționară a lui x.

Proprietăți: $x - 1 < [x] \leq x$; $\{x\} \in [0, 1)$; $[x + n] = [x] + n$ şi $\{x + n\} = \{x\}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Principiul inducției matematice. Fiind dat un predicat $P(n)$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dacă propoziția $P(n_0)$ este adevărată şi, de asemenea, implicația $P(k) \rightarrow P(k+1)$ este adevărată, atunci propoziția $(\forall\ n \geq n_0) P(n)$ este adevărată.

Cardinalul unei mulțimi finite (notat $\operatorname{card}(A)$ sau $|A|$) reprezintă numărul său de elemente.

Proprietăți: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, $|P(A)| = 2^{|A|}$ ($P(A) = \{B \mid B \subset A\}$).

O funcție definită pe mulțimea nevidă A cu valori în mulțimea nevidă B (notație $f : A \rightarrow B$) reprezintă o lege prin care, pentru $\forall\ a \in A$, $\exists!\ b \in B$ astfel încât $a \xrightarrow{f} b$.

Pentru $A' \subset A$, $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$ reprezintă imaginea lui A' prin f, iar $\operatorname{Im} f = f(A)$ reprezintă imaginea funcției f, iar pentru $B' \subset B$, $f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ reprezintă preimaginea lui B' prin f.

Mulțimea $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ reprezintă graficul funcției f.

Pentru $A' \subset A$, funcția $f_{A'} : A' \rightarrow B$, unde $f_{A'}(a) = f(a)$, $\forall\ a \in A'$, reprezintă restricția funcției f la mulțimea A', iar f reprezintă prelungirea funcției $f_{A'}$ la A.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, se numeşte mărginită dacă $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $a \leq f(x) \leq b$, $\forall\ x \in D$.

Mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ se numeşte simetrică dacă $-x \in D$, pentru $\forall\ x \in D$.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, D simetrică, se numeşte pară (respectiv impară) dacă $f(-x) = f(x)$ (respectiv $f(-x) = -f(x)$) pentru $\forall\ x \in D$. Graficul unei funcții pare este simetric față de axa

Oy, iar graficul unei funcții impare este simetric față de originea O. Mai general, dreapta $x = m$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f dacă $f(x) = f(2m - x)$, $\forall\ x \in D$, iar punctul $C(a, b)$ este centru de simetrie pentru grafic dacă $f(x) + f(2a - x) = 2b$, $\forall\ x \in D$.

Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ se numește periodică dacă $\exists\ T > 0$ (numit perioadă) astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall\ x \in D$.

Pentru $f: A \to B$ și $g: B \to C$, se definește funcția $g \circ f: A \to C$ (g compus cu f) prin $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, $\forall\ a \in A$.

Spunem că termenii șirului (a_n) sunt în progresie aritmetică (și notăm $\div(a_n)$) dacă $\exists\ r \in \mathbb{R}$ (numit rație) astfel încât $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Avem $a_n = a_1 + (n-1)r$ pentru $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall\ n \geq 2$, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Spunem că termenii șirului (b_n) sunt în progresie geometrică (și notăm $\div\div(b_n)$) dacă $\exists\ q \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $b_{n+1} = b_n q$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Avem $b_n = b_1 q^{n-1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, $\forall\ n \geq 2$ și $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \begin{cases} \dfrac{b_1 - b_{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$.

Funcția de gradul I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este strict crescătoare dacă $a > 0$, respectiv strict descrescătoare dacă $a < 0$ și are, ca reprezentare grafică, o dreaptă.

Ecuația de gradul al II-lea $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, admite două rădăcini reale distincte $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, rădăcină dublă $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ dacă $\Delta = 0$, respectiv nu admite rădăcini reale dacă $\Delta < 0$.

Avem $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ și $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ (relațiile lui Viète).

Funcția de gradul al II-lea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, are forma canonică $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$, este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$ dacă $a > 0$, respectiv strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$ dacă $a < 0$, are în $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ (vârf) punct de extrem (minim dacă $a > 0$, respectiv maxim dacă $a < 0$), $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, \infty\right)$ dacă $a > 0$, respectiv $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$ dacă $a < 0$, și are, ca reprezentare grafică, o parabolă.

Aplicaţii

1. Să se determine valorile reale nenule ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-(m+1)x+1$ este tangent axei Ox.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(x-2)(x+1)\le 3(x+1)$.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=3$.

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, ştiind că valoarea maximă a funcției $f(x)=-x^2+2x-m+3$ este egală cu 10.

5. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice cu rație 4, ştiind că suma primilor doi termeni este 10.

6. Să se determine valorile reale ale numărului m ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-mx+m+2=0$ verifică egalitatea $2x_1x_2=x_1+x_2$.

7. Într-o progresie geometrică, al doilea termen este 3 şi raportul dintre primul şi al patrulea termen este $\frac{1}{8}$. Să se determine primul termen al progresiei.

8. Să se determine valorile reale ale lui m, ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-mx-m-6=0$ verifică relația $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.

9. Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ cu axele de coordonate.

10. Să se demonstreze că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, ecuația $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluții reale distincte.

11. Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen şi primul termen este egală cu 4.

12. Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4<3x+2<4$.

13. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$.

14. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m$ să fie egal cu 1.

15. Să se arate că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-2mx+m^2-1=0$ verifică relația $x_1x_2-2(x_1+x_2)+2\ge 0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

16. Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice, ştiind că primul termen al progresiei este 7 şi al doilea termen este 9.

17. Să se determine rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge 1}$, ştiind că $b_1=3$ şi $b_2-b_1=3$.

18. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea ale cărei soluții x_1 şi x_2 verifică relațiile
$$\begin{cases} x_1+x_2=11 \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{11}{30} \end{cases}.$$

19. Să se determine punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-1$ şi $g(x)=x+4$.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(6)$.

21. Să se arate că, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$, parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox.

22. Se consideră funcțiile f, g, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$, $g(x)=2x+2$, $h(x)=3x+3$. Să se determine numărul real a astfel încât $a\left(f(x)+h(x)\right)=g(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

23. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$. Să se arate că numerele $f(1)$, $f(0)$ și $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

24. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x=y \end{cases}$, unde $x, y\in\mathbb{R}$.

25. Să se compare numerele $a=\sqrt{2}$ și $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

26. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases}$, unde $x, y\in\mathbb{R}$.

27. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2-x+m=0$ să admită soluții de semne contrare.

28. Să se determine valoarea minimă a funcției $f:[-2, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$.

29. Să se calculeze suma $1+2+2^2+\ldots+2^6$.

30. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(x^2-1\right)(x+1)\geq 0$.

31. Să se determine punctele de intersecție a parabolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

32. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f\left(2\cdot f(-1)\right)$.

33. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ și $g(x)=x-2009$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0$.

34. Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24, ...

35. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$.

Rezolvări

1. G_f este tangent la Ox $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1$.

2. $(x-2)(x+1)\leq 3(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-5)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1, 5]$.

3. Se impune condiția $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2, \infty)$. Avem $\sqrt{x+2}=3 \Leftrightarrow x+2=3^2=9 \Leftrightarrow x=7\in[-2, \infty)$.

4. $a=-1,\ b=2,\ c=-m+3,\ \Delta=4(-m+4),\ y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=-m+4,\ \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y_V=-m+4=10 \Leftrightarrow m=-6.$

5. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia aritmetică. Avem $a_2=a_1+r=a_1+4$ şi $S_2=a_1+a_2=2a_1+4=10 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1=3.$

6. Avem $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=m,\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m+2$, deci $2x_1x_2=x_1+x_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2(m+2)=m \Leftrightarrow m=-4.$

7. Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia geometrică. Avem $b_n=b_1q^{n-1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, unde $q\in\mathbb{R}^*$ este raţia progresiei geometrice. Atunci $\dfrac{b_1}{b_4}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{b_1q^3}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow q^3=8 \Leftrightarrow q=2$. Avem $b_2=b_1q \Rightarrow$
$\Rightarrow b_1=\dfrac{b_2}{q}=\dfrac{3}{2}.$

8. Avem $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=m$ şi $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-m-6$, deci $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4m-m-6=0 \Leftrightarrow m=2.$

9. $f(0)=0^2-1=-1 \Rightarrow G_f\cap Oy=\{V(0,-1)\}$ şi $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm1 \Rightarrow$
$\Rightarrow G_f\cap Ox=\{A(-1,0),\ B(1,0)\}.$

10. Avem $\Delta=m^2-4(-m^2-1)=5m^2+4>0,\ \forall\, m\in\mathbb{R}$, deci ecuaţia admite două soluţii reale distincte.

11. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia geometrică. Avem $x_n=x_1q^{n-1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, unde $q\in\mathbb{R}^*$ este raţia.
$\begin{cases} x_1+x_2=8 \\ x_2-x_1=4 \end{cases} \Rightarrow x_2=6$ şi $x_1=2$, deci $q=\dfrac{x_2}{x_1}=3$. Atunci $S_3=x_1+x_2+x_3=$
$=x_1\left(1+q+q^2\right)=26.$

12. $-4<3x+2<4\ \big|-2 \Leftrightarrow -6<3x<2\ \big|:3 \Leftrightarrow -2<x<\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x\in\left(-2,\dfrac{2}{3}\right).$

13. Se impun condiţiile $3x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{4}{3},\infty\right)$ şi $x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,\infty)$, deci
$x\in\left[-\dfrac{4}{3},\infty\right)\cap[0,\infty)=[0,\infty)$. Atunci $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow 3x+4=4x \Leftrightarrow x=4\in[0,\infty).$

14. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=y_V=-\dfrac{\Delta}{4\cdot 1}=-\dfrac{m^2-4m}{4}=1 \Rightarrow m^2-4m+4=0 \Rightarrow m=2.$

15. Avem $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2m,\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m^2-1$, deci $x_1x_2-2(x_1+x_2)+2=$
$=m^2-1-2m+2=(m-1)^2\geq 0$ pentru $\forall\, m\in\mathbb{R}.$

16. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresia aritmetică, $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, unde $r \in \mathbb{R}$ este rația progresiei. Avem $a_1 = 7$, $a_2 = 9 \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 2$. Deci $a_n = 7 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 5$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. în particular $a_5 = 15$.

17. Avem $b_2 = b_1 + 3 = 6 \Rightarrow q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{6}{3} = 2$.

18. Avem $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \Rightarrow \dfrac{11}{x_1x_2} = \dfrac{11}{30} \Rightarrow x_1x_2 = 30$. Deci $S = x_1 + x_2 = 11$ şi $P = x_1x_2 = 30 \Rightarrow x_1$ şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - Sx + P = x^2 - 11x + 30 = 0$.

19. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 5$. Avem $g(-1) = 3$ şi $g(5) = 9$, deci punctele de intersecţie au coordonatele $(-1, g(-1)) = (-1, 3)$ şi $(5, g(5)) = (5, 9)$.

20. Avem factorul $f(2) = 0$, deci întreg produsul este nul.

21. Avem $a = 1 > 0$ şi $\Delta = (-m)^2 - 4(m^2 + 1) = -3m^2 - 4 < 0 \Rightarrow f(x) > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

22. Avem $f(x) + h(x) = 4x + 4 = 2(2x + 2) = 2g(x)$, deci $a(f(x) + h(x)) = g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2ag(x) = g(x) \Leftrightarrow (2a-1)g(x) = 0$ pentru $\forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2a - 1 = 0$, adică $a = \dfrac{1}{2}$.

23. Avem $f(1) = 1$, $f(0) = 3$, $f(-3) = 9$ şi $3^2 = 1\cdot 9$, deci $f(1)$, $f(0)$ şi $f(-3)$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice de rație 3.

24. Avem $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$. Înlocuind în ecuația a doua, obținem $x^2 + x = 3 - x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -3$ şi $x_2 = 1$, corespunzător $y_1 = 3 - x_1 = 6$ şi $y_2 = 3 - x_2 = 2$, deci $(x, y) \in \{(-3, 6), (1, 2)\}$.

25. Avem $b = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Cum $\sqrt{3} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{2} \Rightarrow b < a$.

26. Avem $S = x + y = -6$ şi $P = xy = 8$, deci x şi y sunt soluțiile ecuației $t^2 - St + P = $ $= t^2 + 6t + 8 = 0$, adică $t_1 = -4$ şi $t_2 = -2$, deci $(x, y) \in \{(-4, -2), (-2, -4)\}$.

27. $\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluții ale ecuației $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$. Rădăcinile x_1 şi x_2 sunt de semne contrare dacă şi numai dacă $P = x_1x_2 = m < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0)$.

În concluzie, $m \in (-\infty, 0) \cap \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right] = (-\infty, 0)$.

28. Observăm că funcția f este descrescătoare, deci $\min\limits_{x\in[-2,1]} f(x) = f(1) = -1 + 1 = 0$.

29. Avem $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^6 = \dfrac{2^7 - 1}{2 - 1} = 127$.

30. Avem $(x^2-1)(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0$ sau $x-1\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in[1,\infty)\cup\{-1\}$.

31. Ecuația $x^2+5x-6=0$ admite soluțiile $x_1=-6$ și $x_2=1$, deci $G_f\cap Ox=$ $=\{(-6,0),(1,0)\}$. Pentru $x=0$ obținem $y=0^2+5\cdot 0-6=-6 \Rightarrow G_f\cap Oy=\{(0,-6)\}$.

32. Avem $f(-1)=(-1)^2+(-1)-2=-2 \Rightarrow 2\cdot(f(-1))=2\cdot(-2)=-4$, iar $f(-4)=$ $=(-4)^2+(-4)-2=10$, deci $f(2\cdot f(-1))=10$.

33. Avem $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$ pentru $\forall\, x\in\mathbb{R}$, deci $(f\circ g)(x)=f(g(x))=$ $=(g(x)+1)^2\ge 0$ pentru $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

34. Avem $b_3>0$ și $\div 6, b_3, 24 \Rightarrow b_3=\sqrt{6\cdot 24}=12$. Din $\div b_1, 6, b_3 \Rightarrow 6^2=b_1\cdot b_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 36=12b_1 \Rightarrow b_1=3\in(0,\infty)$.

35. Avem $f(1)+f(2)+...+f(50)=\sum\limits_{k=1}^{50} f(k)=\sum\limits_{k=1}^{50}(2k+1)=2\sum\limits_{k=1}^{50} k+50=2\cdot\dfrac{(1+50)\cdot 50}{2}+$ $+50=50\cdot 52=2600$.

VECTORI

Noțiuni teoretice

Regula triunghiului: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Regula paralelogramului: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$, unde OABC este paralelogram.

Vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se numesc coliniari dacă au aceeași direcție, respectiv dacă $\exists\, k\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{b}=k\vec{a}$.

Vectorul $\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{OM}$ se numește vector de poziție al punctului M.

Avem $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_M}=\dfrac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{2}$ dacă M este mijlocul lui $[AB]$, respectiv $\overrightarrow{r_M}=\dfrac{\overrightarrow{r_A}+k\overrightarrow{r_B}}{1+k}$ dacă $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}$, $k\ne -1$.

Centrul de greutate G al unui sistem de puncte $A_1, A_2, ..., A_n$ este definit de relația $\overrightarrow{r_G}=\dfrac{\overrightarrow{r_{A_1}}+\overrightarrow{r_{A_2}}+...+\overrightarrow{r_{A_n}}}{n}$ și are proprietățile $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+...+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$, respectiv $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+$ $+...+\overrightarrow{MA_n}=n\overrightarrow{MG}$ (relația lui Leibniz).

Aplicații

1. Triunghiul ABC are centrul de greutate G. Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC, să se determine numărul real a astfel încât $\overrightarrow{AG}=a\cdot\overrightarrow{MA}$.

2. Să se arate că, dacă $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, atunci punctul C este mijlocul segmentului AB.

3. Fie triunghiul echilateral MNP înscris într-un cerc de centru O. Să se demonstreze că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

4. Să se demonstreze că, în patrulaterul MNPQ, are loc relația $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$.

5. Se consideră patrulaterul ABCD în care $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că ABCD este paralelogram.

6. Știind că vectorul $\overrightarrow{AB}$ are lungimea egală cu 12 și $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$, să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{CB}$.

7. Se consideră pătratul ABCD, de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

8. Se consideră paralelogramul ABCD. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$.

9. Să se determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului AB, știind că $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=7\vec{i}+2\vec{j}$.

10. Se consideră paralelogramul ABCD și punctul O, intersecția diagonalelor. Să se demonstreze $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}$.

11. Fie punctele distincte A, B, C, D nu toate coliniare. Știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, să se demonstreze că patrulaterul ABCD este paralelogram.

12. Se consideră reperul cartezian xOy și punctele $A(1,-1)$ și $B(3,5)$. Să se determine coordonatele punctului C din plan astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

Rezolvări

1. Folosind proprietatea conform căreia centrul de greutate al unui triunghi este situat pe fiecare dintre mediane la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază, obținem că $AG=\frac{2}{3}AM$, respectiv $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$, deci $a=-\frac{2}{3}$.

2. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow$ punctele A, B și C sunt coliniare și $AC=CB$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB.

3. Știind că $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului MNP, și că, în cazul unui triunghi echilateral, punctele G și O coincid, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului, obținem că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

4. Avem $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QM}-\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$.

5. Avem $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow DC \parallel AB$ și $DC=AB\Rightarrow$ ABCD paralelogram.

6. Avem $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CB}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|3\overrightarrow{CB}\right|=3\left|\overrightarrow{CB}\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{CB}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|=$ $=\frac{1}{3}\cdot 12=4$.

7. Avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ și $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, deci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

8. Avem $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$, deci $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=$ $=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$, deoarece $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, ABCD fiind paralelogram.

9. Avem $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=5\vec{i}+3\vec{j}$, deci coordonatele punctului M sunt $\left(x_M, y_M\right)=$ $=(5, 3)$.

10. Avem $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ şi $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\right)$, deci $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO}=$ $=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{DC}$, deoarece $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ şi O este mijlocul diagonalelor AC şi BD.

11. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow AB\parallel CD$ şi $AB=DC$, iar vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{DC}$ au acelaşi sens, deci patrulaterul ABCD este convex şi are două laturi opuse paralele şi de aceeaşi lungime, adică este un paralelogram.

12. Avem $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+5\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+4\vec{j}=\overrightarrow{OC}$, deci punctul C are coordonatele $(4, 4)$.

TRIGONOMETRIE

Noţiuni teoretice

Relaţia dintre măsura t în radiani şi măsura α în grade a unui unghi este $\frac{t}{\pi}=\frac{\alpha}{180}$.

Pe cercul unitate $C(O, 1)$ se consideră un sens de parcurgere (invers acelor de ceasornic) şi, pornind din punctul $A(1, 0)$, fiecărui $t\in\mathbb{R}$ i se asociază punctul $M(\cos t, \sin t)$, unde $l\left(\overset{\frown}{AM}\right)=t$.

Formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, $\forall\ t\in\mathbb{R}$.

Avem $\sin(-t)=-\sin t$, $\cos(-t)=\cos t$, $\sin(t+2k\pi)=\sin t$, $\cos(t+2k\pi)=\cos t$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$.

Pentru $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, se defineşte $\operatorname{tg}t=\frac{\sin t}{\cos t}$. Avem $\operatorname{tg}(-t)=-\operatorname{tg}t$, $\operatorname{tg}(t+k\pi)=\operatorname{tg}t$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$.

Pentru $t\neq k\pi$, se defineşte $\operatorname{ctg}t=\frac{\cos t}{\sin t}$. Avem $\operatorname{ctg}(-t)=-\operatorname{ctg}t$, $\operatorname{ctg}(t+k\pi)=\operatorname{ctg}t$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$.

Formule trigonometrice

$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$, $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$, $\cos 2a=\cos^2 a-$ $-\sin^2 a$, $\sin 2a=2\sin a\cos a$, $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$, $\operatorname{tg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tg}a\pm\operatorname{tg}b}{1\mp\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$,

$\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$, $\sin a=\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$, $\cos a=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$, $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, $\sin a-\sin b=$ $=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$.

Aplicaţii

1. Să se arate că este adevărată egalitatea $\sin x \cdot \cos(90° - x) + \cos^2(180° - x) = 1$, oricare ar fi x măsura unui unghi ascuţit.

2. Să se calculeze $\sin^2 120° + \cos^2 60°$.

3. Să se demonstreze că expresia $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cos x$ este constantă, pentru oricare număr real x.

4. Să se calculeze $\sin 10° - \cos 80°$.

5. Să se determine $\cos(180° - x)$, ştiind că x este măsura unui unghi ascuţit şi $\cos x = \frac{1}{2}$.

6. Ştiind că $\sin 80° - \cos 80° = a$, să se calculeze $\sin 100° + \cos 100° - a$.

7. Să se calculeze produsul $(\cos 1° - \cos 9°) \cdot (\cos 2° - \cos 8°) \cdot \ldots \cdot (\cos 9° - \cos 1°)$.

8. Să se calculeze lungimile catetelor triunghiului ABC ştiind că $m(\hat{A}) = 90°$, $m(\hat{B}) = 60°$ şi lungimea ipotenuzei este egală cu 8.

9. Să se calculeze cosinusul unghiului ascuţit format de diagonalele dreptunghiului ABCD ştiind că $AB = 16$ şi $BC = 12$.

10. Să se determine lungimile catetelor AB şi AC ale triunghiului dreptunghic ABC ştiind că $\sin B = \frac{3}{5}$ şi $BC = 15$.

11. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC, cu $m(\hat{A}) = 90°$, are loc relaţia $AD^2 = AB \cdot AC \cdot \sin B \cdot \sin C$, unde D este piciorul înălţimii duse din vârful A.

12. Se consideră dreptunghiul ABCD care are $AB = 8$ şi $BC = 6$. Să se calculeze cosinusul unghiului ascuţit format de diagonalele dreptunghiului.

13. Să se demonstreze că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci are loc relaţia $\sin B + \cos B = \frac{AB + AC}{BC}$.

14. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

15. Să se rezolve în $(0, \pi)$ ecuaţia $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

16. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, astfel încât $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Rezolvări

1. Avem $\cos(90° - x) = \sin x$ şi $\cos(180° - x) = -\cos x$, deci $\sin x \cdot \cos(90° - x) +$ $+ \cos^2(180° - x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru $\forall\ x \in (0°, 90°)$, conform teoremei fundamentale a trigonometriei.

2. Avem $\sin 120° = \sin(180° - 120°) = \sin 60°$, deci $\sin^2 120° + \cos^2 60° =$ $= \sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$.

3. $(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=$
$=\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$

4. $\sin 10^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\cos 80^\circ\Rightarrow \sin 10^\circ-\cos 80^\circ=0.$

5. $\cos(180^\circ-x)=-\cos x=-\dfrac{1}{2}.$

6. Avem $\sin 100^\circ=\sin(180^\circ-100^\circ)=\sin 80^\circ$ şi $\cos 100^\circ=-\cos(180^\circ-100^\circ)=-\cos 80^\circ$, deci $\sin 100^\circ+\cos 100^\circ=\sin 80^\circ-\cos 80^\circ=a\Rightarrow \sin 100^\circ+\cos 100^\circ-a=0.$

7. Observăm că termenii din produs sunt de forma $\cos x-\cos y$, cu $x, y\in\{1^\circ, 2^\circ, ..., 9^\circ\}$ şi $x+y=10^\circ$, deci apare inclusiv termenul $\cos 5^\circ-\cos 5^\circ=0$, de unde deducem că întreg produsul este nul.

8. Avem $\sin\hat{B}=\dfrac{AC}{BC}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AC}{8}\Leftrightarrow AC=4\sqrt{3}$ şi $\sin\hat{C}=\dfrac{AB}{BC}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{AB}{8}\Leftrightarrow AB=4.$

9. $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20,\ AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow OB=OD=\dfrac{AC}{2}=10\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cos(\sphericalangle BOC)=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2OB\cdot OC}=\frac{10^2+10^2-12^2}{2\cdot 10^2}=\frac{7}{25}.$$

10. $\sin B=\dfrac{AC}{BC}\Leftrightarrow\dfrac{3}{5}=\dfrac{AC}{15}\Leftrightarrow AC=9$ şi $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12.$

11. Avem $\sin B=\dfrac{AD}{AB}\Rightarrow AD=AB\sin B$ şi $\sin C=\dfrac{AD}{AC}\Rightarrow AD=AC\sin C$, deci
$AD^2=AD\cdot AD=(AB\sin B)\cdot(AC\sin C)=AB\cdot AC\cdot\sin B\sin C.$

12. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor AC şi BD. Avem $AC=BD=\sqrt{AB^2+BC^2}=$ $=\sqrt{8^2+6^2}=10$. Observăm că $OB=OC=\dfrac{AC}{2}=5$. Din $AB=8>6=BC$ deducem că $\widehat{BOC}=\alpha$ este unghiul ascuţit format de diagonalele dreptunghiului. Din teorema cosinusului aplicată în triunghiul OBC, obţinem $\cos\alpha=\dfrac{OB^2+OC^2-BC^2}{2\cdot OB\cdot OC}=\dfrac{5^2+5^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 5}=\dfrac{14}{2\cdot 25}=\dfrac{7}{25}.$

13. Avem $\sin B=\dfrac{AC}{BC}$ şi $\cos B=\dfrac{AB}{BC}$, deci $\sin B+\cos B=\dfrac{AC}{BC}+\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AB+AC}{BC}.$

14. Avem $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow 3x+\dfrac{\pi}{4}=x-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, cu mulţimea soluţiilor $\left\{\dfrac{(4n-1)\pi}{4}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$, respectiv $3x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2k\pi$, cu mulţimea soluţiilor $\left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{4}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Observăm că, pentru $k=2n-1$, obţinem $\dfrac{(2k+1)\pi}{4}=\dfrac{(4n-1)\pi}{4}$, deci $\left\{\dfrac{(4n-1)\pi}{4}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}\subset$ $\subset\left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{4}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}.$